



«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ОИЯИ

д.ф.-м.н, академик РАН

В.А. Матвеев

«17» ноября 2014

## ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Гулицкого Николая Михайловича «Ренормгрупповой анализ моделей турбулентного переноса и магнитной гидродинамики», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Диссертация Н.М.Гулицкого посвящена изучению моделей переноса пассивных полей примеси турбулентной средой. Наибольшие успехи при изучении аномального скейлинга в статистических моделях турбулентного переноса были достигнуты с помощью применения методов ренормализационной группы и операторного разложения. При таком подходе аномальный скейлинг является следствием существования составных полей («составных операторов» в терминологии квантовой теории поля) с отрицательными критическими размерностями. В течение последних лет данные методы были применены к различным задачам турбулентного переноса пассивных векторных полей – как непосредственно к модели Крейчнана – первой модели, для которой удалось вычислить бесконечный набор аномальных показателей на основе микроскопической модели в рамках регулярной теории возмущений – так и к различным ее обобщениям, таким как конечному времени корреляции, анизотропии, сжимаемости, нелинейности наиболее общего вида и т. д. Были получены аналитические выражения для членов первого и второго порядков эpsilon-разложения. Поэтому **научная новизна и актуальность** работы не вызывают сомнений.

**Целью работы** является изучение аномального скейлинга в моделях магнитогиродинамической турбулентности методами теоретико-полевой ренормгруппы и операторного разложения. Рассматривается приближение, в котором влиянием магнитного поля на динамику жидкости можно пренебречь («кинематическая модель динамо»), тогда проблему можно рассматривать как описание турбулентного переноса пассивного векторного (магнитного) поля в заданном турбулентном течении. Для описания движения проводящей среды привлекаются статистический ансамбль Казанцева-Крейчнана (поле скорости гауссово и имеет нулевое время корреляции), его обобщение на случай сильной анизотропии с одним выделенным направлением (ансамбль Авельянеды-Майда) и стохастическое уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Также рассматривается обобщенная модель для динамики пассивного векторного поля, в которой нелинейность имеет наиболее общий вид, совместимый с галилеевой симметрией (т. н. А-модель). В качестве частных случаев она содержит кинематическую модель динамо и линеаризованное уравнение Навье-Стокса, а также позволяет рассматривать влияние нелокальных вкладов давления.

**Структура и содержание диссертации.** Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, 3 приложений и библиографии.

Первая глава представляет собой краткий обзор литературы, связанный с темой диссертационного исследования, а также содержит введение в проблематику задач данного типа: описание ансамблей скорости и постановку задачи с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена переформулировке данных задач в виде некоторых квантовопольных моделей с заданными функционалами действия; для каждой из трех моделей устанавливается ренормируемость и вычисляется оператор собственной энергии, входящий в уравнение Дайсона. На основе канонических размерностей 1–неприводимых функций Грина показано, что две модели из трех имеют единственную расходящуюся функцию – коррелятор основного и вспомогательного полей, являющуюся оператором собственной энергии. Показано, что для данной функции все многопетлевые диаграммы тождественно равны нулю из-за замкнутого цикла запаздывающих пропагаторов. Третья модель имеет расходящиеся функции трех типов, две из которых отвечают парному коррелятору, а третья – тройному. Расходящиеся части всех парных корреляторов вычислены точно, расходящаяся часть тройной корреляционной функции вычислена в первом порядке по константе связи  $g$ .

В третьей главе вычисляются РГ-функции – аномальные размерности и бета-функции полей и параметров; показано, что в некоторых интервалах значений параметров данные модели обладают ИК-притягивающей неподвижной точкой, определяющей ИК-асимптотику корреляционных функций. На основании анализа уравнения Дайсона находятся константы ренормировки  $Z$  полей и параметров модели. РГ-функции, в конечном итоге определяющие искомую асимптотику, вычислены в первом порядке по константе связи  $g$ . Установлено, что для одной из моделей критические размерности полей совпадают с их каноническими размерностями, в то время как для двух других критические размерности полей содержат поправки по параметру разложения  $\epsilon$ .

Четвертая глава посвящена ренормировке составных операторов в модели, отвечающей анизотропному ансамблю скорости Авельянеды-Майда. С помощью техники ренормализационной группы и операторного разложения показано, что матрица ренормировки дается своим однопетлевым приближением точно; приведены выражение для матрицы аномальных размерностей и матрицы критических размерностей. В частности доказано, что матрица аномальных размерностей является нильпотентной, следствием чего является невозможность диагонализации матрицы критических размерностей. В результате вместо степенной зависимости от внешнего масштаба асимптотика парной корреляционной функции является логарифмической.

В пятой главе методы ренормализационной группы и операторного разложения применяются к изучению асимптотики корреляционных функций в модели, отвечающей ансамблю скорости Казанцева-Крейчнана и модели, в которой среда описывается с помощью стохастического уравнения Навье-Стокса. Установлено наличие аномального скейлинга и вычислены соответствующие аномальные показатели в двухпетлевом (в случае ансамбля Казанцева-Крейчнана) и однопетлевом (в случае стохастического уравнения Навье-Стокса) приближениях. Для данных двух моделей проверено, что в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущий вклад в асимптотику корреляционных функций в инерционном интервале дает изотропная «сфера», что

является подтверждением гипотезы Колмогорова о локальном восстановлении изотропии и наблюдается как в настоящих экспериментах с турбулентностью в жидкости, так и в модели пассивного скалярного поля. Проведено сравнение с точным решением в случае парной корреляционной функции, что подтверждает взаимную согласованность методов ренормализационной группы и операторного разложения с методом нулевых мод.

В приложениях к Главе 1 рассматриваются следствия галилеевой инвариантности, вывод модели магнитной гидродинамики Казанцева-Крейчнана и согласование динамики с условием поперечности полей.

В приложениях к Главе 2 рассматривается доопределение тета-функции при совпадающих аргументах, доказана невозможность существования двух пространственных масштабов в модели с анизотропным полем скорости, а также приводится вычисление канонических размерностей для одной из моделей.

В приложениях к Главе 3 рассматриваются выводы и основные следствия теории ренормировки – вид оператора ренормализационной группы, связь констант ренормировки  $Z$ , бета- и гамма-функций, а также инвариантный заряд и ИК-притягивающая неподвижная точка.

**Основные результаты диссертации** состоят в следующем.

1. Изучена модель турбулентного переноса пассивного векторного поля при наличии крупномасштабной анизотропии в случае, когда поле скоростей описывается стохастическим уравнением Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Установлено существование аномального скейлинга в инерционном интервале масштабов, а соответствующие показатели вычислены явно в главном (однопетлевом) приближении ренормгруппы, включая показатели анизотропных вкладов. Как и для случая скалярного поля, они демонстрируют иерархию, связанную со степенью анизотропности вклада: чем она выше, тем больше показатель и тем быстрее вклад убывает в глубине инерционного интервала. Ведущий член асимптотики в инерционном интервале определяется изотропным вкладом в согласии с гипотезой Колмогорова о локально изотропной турбулентности.
2. Изучена кинематическая модель турбулентного динамо при наличии крупномасштабной анизотропии для случая, когда поле скоростей описывается статистическим ансамблем Казанцева-Крейчнана. Аномальные показатели явно вычислены в двухпетлевом приближении ренормгруппы (второй порядок эpsilon-разложения). Показано, что в отличие от скалярного случая, учет двухпетлевого вклада приводит к усилению аномального скейлинга и иерархии анизотропных вкладов по сравнению с ведущим (однопетлевым) приближением.
3. Изучена модель турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скоростей описывается сильно анизотропным статистическим ансамблем Авельянеды-Майда с одним выделенным направлением. Показано, что соответствующие уравнения ренормализационной группы имеют инфракрасно-притягивающую неподвижную точку в широком интервале параметров, в том числе для частных случаев кинематической модели динамо, линеаризованного уравнение Навье-Стокса и т.н. линейной модели с давлением, то есть в модели реализуется скейлинговое поведение.

Найдены точные значения соответствующих критических размерностей полей и основных параметров модели.

4. Установлено, что в модели турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скоростей описывается статистическим ансамблем Авельянеды-Майда, аномальный скейлинг проявляется в логарифмической зависимости корреляционных функций от внешнего (интегрального) масштаба, в отличие от степенной зависимости для ансамбля Казанцева-Крейчнана и большинства его модификаций. Это является результатом специального случая смешивания в семействах составных операторов, при котором матрица смешивания оказывается нильпотентной.

**Практическая ценность** диссертации определяется возможными приложениями полученных результатов к описанию различных процессов в солнечной короне, ионосфере и межзвездном газе. Результаты работы должны стимулировать экспериментальные исследования по аккуратному измерению аномальных показателей в МГД турбулентности. Развитые методы могут быть применены к другим подобным стохастическим задачам, таким как турбулентный перенос тензорных полей, описание турбулентного переноса с помощью стохастического уравнения Навье-Стокса при наличии анизотропии и сжимаемости и т.п. **Достоверность результатов** обеспечивается использованием мощного и хорошо развитого математического аппарата квантовой теории поля и сравнением с результатами, известными ранее для различных частных случаев. Включенные в диссертацию результаты отражают **личный вклад диссертанта**.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации опубликованы в четырех статьях в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК и тезисах докладов двух международных конференций. Также они были представлены лично диссертантом на нескольких международных научных конференциях.

К диссертации можно сделать следующие замечания:

- В работе имеются некоторые незначительные опечатки.
- Не вполне удачно использование термина "Уравнение Дайсона" в разделе 2.2.4. Обычно под уравнением Дайсона понимается соотношение, связывающее связную и 1-неприводимую парные функции Грина. В данном случае обсуждается только 1-неприводимая функция и для неё пишется диаграммное представление.
- В формуле (2.23) и некоторых подобных по-видимому подразумевается наличие поперечного проектора, что явно не упомянуто.
- После формулы (3.39) по-видимому выпала часть фразы - имеется в виду, что интеграл не просто конечен, а равен нулю. Конечность нужна, чтобы уточнить, что интеграл не нуждается в доопределении, в отличие от похожего интеграла (B8).
- Желательно было бы рассмотреть модель с конечным временем корреляции поля скоростей и с учетом сжимаемости жидкости. Но это скорее пожелания на будущее.

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

В диссертации Н.М. Гулицкого решены важные научные задачи. Полученные результаты представляются достоверными, они докладывались на семинарах и международных конференциях и известны специалистами. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в ведущих научных журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Материалы диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях, проводимых в СПбГУ, МГУ им. М.В. Ломоносова, Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Институте космических исследований РАН, Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, ПИЯФ РАН и других институтах и научных центрах, ведущих исследования в области квантовой теории поля и статистической физики, особенно магнитной гидродинамики и турбулентности плазмы.

Все сказанное выше позволяет заключить, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям по специальности 01.04.02 – теоретическая физика, а ее автор, Николай Михайлович Гулицкий, несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв составил зам. директора ЛТФ д.ф.-м.н. проф. Гнатич М.. Диссертация обсуждена и одобрена на семинаре Лаборатории Теоретической Физики ОИЯИ 14.11.2014..

Заместитель директора  
Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова  
Объединенного инситута ядерных исследований  
ул. Жолио-Кюри 6  
141980 Дубна, Московская область  
тел.: +74962162473  
факс.: +74962165084  
д.ф.-м.н., профессор



Гнатич Михал